

Fond. Anal. Mat. 2  
 Preparazione allo scritto n. 2  
 9 Dicembre, 2008  
 Prof. N. Garofalo

Problema	Punti	Punt. massimo
<b>1 Mecc + Aer</b>		20
<b>2 Mecc + Aer</b>		20
<b>3 Mecc + Aer</b>		20
<b>4 Mecc + Aer</b>		20
<b>5 Mecc</b>		20
<b>6 Aer</b>		20
<b>7 (Bonus) Mecc + Aer</b>		10
<b>Totale</b>		100 + 10 bonus

Se per un problema non si sceglie alcuna risposta, si ottiene credito nullo per quel problema.

**Problema 1.** (a) Sia  $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ . Se  $0 < a < n$ , allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \int_B \frac{\sin\left(\frac{|x|}{k}\right)}{|x|^{a+1}} dx$$

- A. non esiste
- B. esiste ed è uguale a  $\frac{\omega_n}{a}$  ( $\omega_n =$  volume  $n$ -dimensionale di  $B$ )
- C. esiste ed è uguale a  $\frac{\sigma_{n-1}}{n-a}$  ( $\sigma_{n-1} =$  volume  $(n-1)$ -dimensionale di  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ )
- D. esiste ed è  $= 0$
- E. esiste ed è  $= 0$  se e solo se  $a < n - 1$

(b) Sia  $B(10) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 10\}$ , allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \int_{B(10)} \frac{\log\left(1 + \frac{|x|^2}{k^2}\right)}{|x|^{n+1}} dx$$

- A. esiste ed è  $= 0$
- B. esiste ed è uguale a  $\frac{\omega_n}{n}$
- C. esiste ed è uguale a  $\sigma_{n-1}$
- D. non esiste
- E. esiste ed è  $10\omega_n$

**Problema 2.** Sia  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  e per  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  si consideri la funzione

$$f(x, y, z) = f(X) = e^{-\langle AX, X \rangle}.$$

La trasformata di Fourier di  $f$  è data da

A.  $\hat{f}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{5} e^{-\frac{\pi^2}{5}(\xi^2+3\eta^2-2\xi\eta+2\zeta^2)}$

B.  $\hat{f}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{5} e^{-\frac{\pi^2}{5}(\xi^2-3\eta^2-2\xi\eta+2\zeta^2)}$

C.  $\hat{f}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{5} e^{-\frac{\pi^2}{5}(\xi^2+3\eta^2-2\eta\zeta+2\zeta^2)}$

D.  $\hat{f}(\xi, \eta, \zeta) = \pi^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi^2}{5}(\xi^2+3\eta^2+2\eta\zeta+2\zeta^2)}$

E.  $\hat{f}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{5} e^{-5\pi^2(\xi^2+3\eta^2-2\eta\zeta+2\zeta^2)}$

2) Sia  $f(x) = e^{-4\pi^2|x|^2}$ , allora  $f \star f(x) =$

A.  $\pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^4}{2}}$

B.  $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\pi}}$

C.  $(4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi^2|x|^2}$

D.  $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-|x|^4}$

E.  $\pi^{-\frac{n}{2}} e^{-2\pi^2|x|^2}$

**Problema 3.** (20 punti) Si consideri la funzione definita da

$$f(x_1, x_2, t) = \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \frac{t}{(t^2 + (x_1 - y_1)^2 + (x_1 - y_1)^2)^{\frac{3}{2}}} dy_1 dy_2, \quad (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}_+^3 = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera:

- A.  $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^3)$ , e  $f_{x_1 x_1} + f_{x_2 x_2} - f_t = 0$  in  $\mathbb{R}_+^3$
- B.  $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^3)$  e  $f_{x_1 x_1} + f_{x_2 x_2} + f_{tt} = 3f$  in  $\mathbb{R}_+^3$
- C.  $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^3)$  e  $f_{x_1 x_1} + f_{x_2 x_2} + f_{tt} = -2f$  in  $\mathbb{R}_+^3$
- D.  $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^3)$  e  $f_{x_1 x_1} + f_{x_2 x_2} + f_{tt} = 0$  in  $\mathbb{R}_+^3$
- E.  $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^3)$  e  $f_{x_1 x_1} + f_{x_2 x_2} + f_{tt} = 2$  in  $\mathbb{R}_+^3$

**Problema 4. 1)** (20 punti) Sia  $\phi \in C(\mathbb{R}^4)$  avente supporto compatto. Una soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore con termine di drift

$$\begin{cases} \Delta f + 2\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} - 3\frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0, & \text{in } \mathbb{R}^4 \times (0, \infty), \\ f(x, 0) = \phi(x), & x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \end{cases}$$

è data da

A.  $(4\pi t)^{-3} \int_{\mathbb{R}^4} \exp \left\{ -\frac{(y_1+2t)^2 + (y_2+t)^2 + y_3^2 + (y_4-3t)^2}{4t} \right\} \phi(x-y) dy$

B.  $(4\pi t)^{-2} \int_{\mathbb{R}^4} \exp \left\{ -\frac{(y_1-2t)^2 - (y_2+t)^2 - y_3^2 + (y_4+3t)^2}{4t} \right\} \phi(x-y) dy$

C.  $(4\pi t)^{-2} \int_{\mathbb{R}^4} \exp \left\{ -\frac{(y_1+2t)^2 + (y_2+t)^2 - 3y_3^2 + (y_4+3t)^2}{4t} \right\} \phi(x-y) dy$

D.  $(4\pi t)^{-2} \int_{\mathbb{R}^4} \exp \left\{ -\frac{(y_1+2t)^2 + (y_2-t)^2 + 3y_3^2 + (y_4+3t)^2}{4t} \right\} \phi(x-y) dy$

E.  $(4\pi t)^{-2} \int_{\mathbb{R}^4} \exp \left\{ -\frac{(y_1-2t)^2 + (y_2+t)^2 + y_3^2 + (y_4+3t)^2}{4t} \right\} \phi(x-y) dy$

**Problema 5.** (20 punti) (**Solo Meccanici**) La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \Delta f - f_{tt} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ f(x, 0) = \frac{|x|^2}{6}, \quad f_t(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

è data da

A.  $f(x, t) = \frac{|x|^2}{12} + \frac{t^2}{4}$

B.  $f(x, t) = \frac{|x|^2}{6} - \frac{t^2}{2}$

C.  $f(x, t) = |x|^2 + 3t^2$

D.  $f(x, t) = \frac{|x|^2}{6} + \frac{t^2}{2}$

E.  $f(x, t) = \frac{|x|^2}{2} + \frac{3t^2}{2}$

**N.B.:** Bisogna giustificare la risposta partendo dalla formula rappresentativa della soluzione. In caso contrario NON si otterrà credito. NON si otterrà credito per una risposta “per eliminazione” basata su un calcolo diretto su ognuna delle possibili risposte.

**Problema 6.(Solo Aerospaziali)** (20 punti) Sia  $\phi(x) = 3 + (|x|^4 - 1)e^{-|x|^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e si consideri la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \Delta f - f_t = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ f(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Allora per ogni  $(x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$  risulta

A.  $-e^{-1} \leq f(x, t) \leq 3$

B.  $0 \leq f(x, t) \leq 3$

C.  $-e^{-1} \leq f(x, t) \leq 2$

D.  $-\frac{1}{3} \leq f(x, t) \leq 3$

E.  $-1 \leq f(x, t) \leq 1$